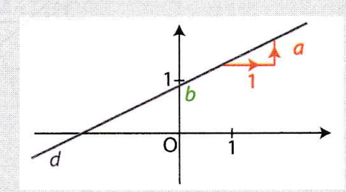
7 Équations de droites

FICHE 48 Bien démarrer

- a et b désignent des nombres réels.
Dans un repère orthonormé, la représentation graphique d'une **fonction affine** $x \mapsto ax + b$ est constituée de tous les points de coordonnées $(x\,;ax + b)$. C'est une droite d.
- Le nombre a est le coefficient directeur de la droite d.
- Le nombre b est l'ordonnée à l'origine de la droite d.

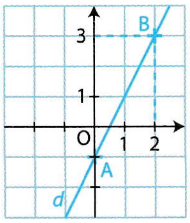


1 Tracer une représentation graphique (1)

Dans un repère orthonormé, d est la droite qui représente la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 1$.

a. Calculer $f(0)$ et $f(2)$ puis en déduire les coordonnées de deux points de d.

b. Tracer la droite d.



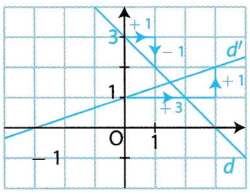
a. $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$ et $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$.
Les points $A(0\,;-1)$ et $B(2\,;3)$ appartiennent à d.

2 Tracer une représentation graphique (2)

Dans un repère orthonormé, d et d' sont les droites qui représentent respectivement les fonctions affines :

$$x \mapsto -x + 3 \text{ et } x \mapsto \frac{1}{3}x + 1.$$

Utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de chaque droite pour les tracer.



3 Reconnaître l'appartenance à une droite

Dans un repère orthonormé, d est la droite qui représente la fonction affine $x \mapsto 4x - 7$.

Déterminer si le point appartient ou non à la droite d.

a. $A(8\,;25)$ **b.** $B(-2\,;1)$ **c.** $C(32{,}5\,;123)$

a. $4 \times 8 - 7 = 25$ donc A appartient à d.
b. $4 \times (-2) - 7 = -15$ et $-15 \neq 1$
donc B n'appartient pas à d.
c. $4 \times 32{,}5 - 7 = 123$
donc C appartient à d.

4 Calculer des coordonnées

Dans un repère orthonormé, d est la droite qui représente la fonction affine $g : x \mapsto -3x + 4$.

$M(18\,;y)$ et $N(x\,;100)$ sont deux points de d.

Déterminer x et y.

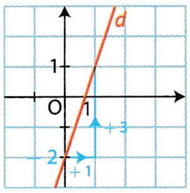
- $y = -3 \times 18 + 4$ c'est-à-dire $y = -50$.
- $-3x + 4 = 100$ équivaut à $-3x = 96$
c'est-à-dire $x = \dfrac{96}{-3} = -32$.

5 Déterminer une fonction affine

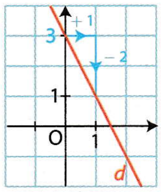
Dans un repère orthonormé, la droite d représente une fonction affine f.

Dans chaque cas, indiquer l'ordonnée à l'origine b et le coefficient directeur a de la droite d puis donner l'expression de $f(x)$.

a.



b.

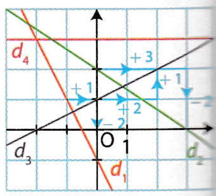


a. $b = -2$ et $a = 3$ donc $f(x) = 3x - 2$.
b. $b = 3$ et $a = -2$ donc $f(x) = -2x + 3$.

6 Reconnaître une représentation graphique

Pour chaque droite de ce graphique, lire son coefficient directeur a et son ordonnée à l'origine b.

En déduire la fonction représentée pour chaque droite.

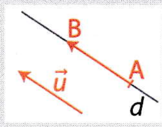


$d_1 : x \mapsto -2x - 1$ $d_2 : x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$

$d_3 : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ $d_4 : x \mapsto 3$

FICHE 49 Vecteurs directeurs d'une droite

- Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est **un vecteur directeur** d'une droite *d*, signifie qu'il existe deux points A et B de *d* tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- *d* est la droite qui passe par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M appartient à la droite *d* si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ **et** $\overrightarrow{AM}$ **sont colinéaires.**
- Deux droites *d* et *d′* de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles** si, et seulement si, $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires.**



Deux calculs

- Calculer $A = (\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)$.

$A = (\sqrt{3})^2 - 3^2 = 3 - 9 = -6$

- Résoudre l'équation $x^2 - 1 = -\frac{5}{4}$.

$x^2 = 1 - \frac{5}{4}$ équivaut à $x^2 = -\frac{1}{4}$

Donc l'équation n'a pas de solution.

★

1 Dans un repère orthonormé, $A(-20;5)$ et $B(28;23)$ sont deux points et $\vec{u}(8;3)$ est un vecteur.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

a. $\overrightarrow{AB}\ (28-(-20);23-5)$ donc $\overrightarrow{AB}\ (48;18)$.
b. Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}\ (48;18)$ et du vecteur $\vec{u}\ (8;3)$ est : $48 \times 3 - 8 \times 18 = 144 - 144 = 0$.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

2 Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites *d* et *d′*.
Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ puis interpréter le résultat.

a. $\vec{u}(4;-10)$ et $\vec{v}\ (-6;15)$ **b.** $\vec{u}(6;4)$ et $\vec{v}\ (7;5)$

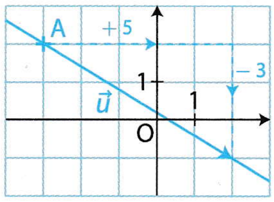
a. $4 \times 15 - (-6) \times (-10) = 60 - 60 = 0$.
Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est nul donc les droites *d* et *d′* sont parallèles.
b. $6 \times 5 - 7 \times 4 = 30 - 28 = 2$.
Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est non nul donc les droites *d* et *d′* sont sécantes.

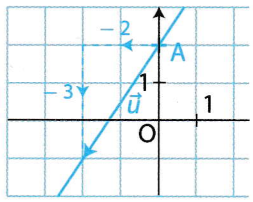
3 Dans un repère orthonormé, $C(-1;-2)$; $D(7;-5)$ et $M(103;-41)$ sont trois points.
Le point M appartient-il à la droite (CD) ?

$\overrightarrow{CD}\ (7-(-1);-5-(-2)$, soit $\overrightarrow{CD}\ (8;-3)$
$\overrightarrow{CM}\ (103-(-1);-41-(-2)$, soit $\overrightarrow{CM}\ (104;-39)$.
$8 \times (-39) - 104 \times (-3) = -312 + 312 = 0$.
Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{CD}$ et du vecteur $\overrightarrow{CM}$ est nul donc le point M appartient à la droite (CD).

4 Dans le repère orthonormé donné, tracer la droite qui passe par le point A et dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

a. $A(-3;2)$ et $\vec{u}\ (5;-3)$ **b.** $A(0;2)$ et $\vec{u}\ (-2;-3)$





5 Dans un repère orthonormé, $A(2;-3)$, $B(-4;9)$ et $C(-3;6)$, $D(1;-2)$ sont quatre points.

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\ (-4-2;9-(-3))$ soit $\overrightarrow{AB}\ (-6;12)$

$\overrightarrow{CD}\ (1-(-3);-2-6)$ soit $\overrightarrow{CD}\ (4;-8)$

b. Calculer le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$-6 \times (-8) - 4 \times 12 = 48 - 48 = 0$.

c. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

★★

6 Dans un repère orthonormé, $E(4;3)$, $F(4;1)$, $G(-5;7)$ et $H(10;-1)$ sont quatre points.

1. a. Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (EF) et (GH).

b. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

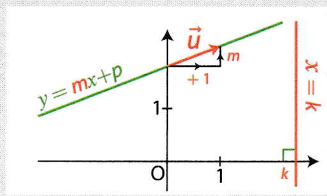
2. Les droites (EH) et (FG) sont-elles parallèles ?

1. a. $\overrightarrow{EF}\ (4-4;1-3)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{EF}\ (0;-2)$.
$\overrightarrow{GH}\ (10-(-5);-1-7)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{GH}\ (15;-8)$.
b. $0 \times (-8) - 15 \times (-2) = 30$.
Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{EF}$ et du vecteur $\overrightarrow{GH}$ est non nul donc les droites (EF) et (GH) sont sécantes
2. $\overrightarrow{EH}\ (10-4;-1-3)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{EH}\ (6;-4)$.
$\overrightarrow{FG}\ (-5-4;7-1)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{FG}\ (-9;6)$.
$6 \times 6 - (-9) \times (-4) = 36 - 36 = 0$.
Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{EH}$ et du vecteur $\overrightarrow{FG}$ est nul donc les droites (EH) et (FG) sont parallèles.

FICHE 50 Équations cartésiennes d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Toute droite d admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$ et $\vec{u}\,(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.
- a, b et c désignent des nombres réels avec $\boldsymbol{a \neq 0}$ **ou** $\boldsymbol{b \neq 0}$.
  L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont telles que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{-b\,;a})$.
- Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une **équation réduite** de la forme $y = mx + p$; un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}\,(1\,;m)$.
  $\boldsymbol{m}$ est la **pente** (ou coefficient directeur) de la droite.
  Toute droite **parallèle à l'axe des ordonnées** a une **équation** de la forme $\boldsymbol{x = k}$.



Deux calculs

- $f(x) = 5x^2 - 2$. Calculer $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 2 = 5 \times \dfrac{4}{9} - 2 = \dfrac{20}{9} - \dfrac{18}{9} = \dfrac{2}{9}$

- Résoudre l'inéquation $2x - 4 \geqslant \dfrac{1}{2}x + 1$.

$2x - \dfrac{1}{2}x \geqslant 1 + 4$ équivaut à $\dfrac{3}{2}x \geqslant 5$ soit $x \geqslant 5 \times \dfrac{2}{3}$

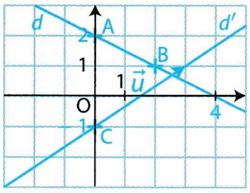
c'est-à-dire $x \geqslant \dfrac{10}{3}$. Ainsi, $\mathscr{S} = \left[\dfrac{10}{3}\,;+\infty\right[$

★

1 d et d' sont les droites d'équations cartésiennes $x + 2y - 4 = 0$ et $2x - 3y - 3 = 0$.

a. Calculer les ordonnées des points de d d'abscisses 0 et 2, puis tracer la droite d.

b. Déterminer un point de d' et un vecteur directeur de d' puis tracer la droite d'.



a. Si $x = 0$, alors $2y - 4 = 0$ soit $y = 2$.
Donc d passe par le point A$(0\,;2)$.
Si $x = 2$, alors $2 + 2y - 4 = 0$ soit $y = 1$.
Donc d passe par le point B$(2\,;1)$.
b. Si $x = 0$, alors $-3y - 3 = 0$ soit $y = -1$.
Donc d passe par le point C$(0\,;-1)$. De plus, $a = 2$ et $b = -3$ donc $\vec{u}(3\,;2)$ est un vecteur directeur de d'.

2 Une droite d passe par le point A$(5\,;9)$ et admet le vecteur $\vec{u}\,(3\,;4)$ pour vecteur directeur.

a. Compléter : $\vec{u}\,(3\,;4)$ est un vecteur directeur de d donc une équation de d est de la forme $4x - 3y + c = 0$.

b. Utiliser le point A pour déterminer la valeur de c puis en déduire une équation cartésienne de d.

Les coordonnées de A vérifient l'équation de d donc $4 \times 5 - 3 \times 9 + c = 0$ c'est-à-dire $-7 + c = 0$ soit $c = 7$.
Une équation cartésienne de la droite d est :
$$4x - 3y + 7 = 0.$$

3 D$(2\,;5)$ et E$(9\,;1)$ sont deux points.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

c. En déduire une équation réduite de la droite (DE) puis la pente de cette droite.

a. $\overrightarrow{DE}\,(9 - 2\,;1 - 5)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{DE}\,(7\,;-4)$.
b. • $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur directeur de la droite (DE) donc une équation cartésienne de (DE) est de la forme :
$$-4x - 7y + c = 0.$$
• D$(2\,;5)$ appartient à la droite (DE)
donc $-4 \times 2 - 7 \times 5 + c = 0$ c'est-à-dire $-43 + c = 0$ soit $c = 43$.
Une équation cartésienne de la droite (DE) est donc $-4x - 7y + 43 = 0$ soit aussi $4x + 7y - 43 = 0$.
c. De $4x + 7y - 43 = 0$ on déduit $7y = -4x + 43$.
Une équation réduite de (DE) est alors $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{43}{7}$.
La pente de la droite (DE) est $-\dfrac{4}{7}$.

4 d et d' sont les droites d'équations cartésiennes respectives $3x - 15y + 6 = 0$ et $-7x + 35y + 9 = 0$.
Déterminer si les droites d et d' sont parallèles ou non.

$\vec{u}\,(15\,;3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}\,(-35\,;-7)$ est un vecteur directeur de d'.
$15 \times (-7) - (-35) \times 3 = -105 + 105 = 0$
Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est nul donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : les droites d et d' sont donc parallèles.

5 d est la droite d'équation : $3x + 2y + 6 = 0$.
Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d passant par le point A$(1\,;5)$.

• $\vec{u}\,(-2\,;3)$ est un vecteur directeur de la droite d, donc aussi de la droite d'.
Une équation de d' est de la forme $3x + 2y + c = 0$.
• A$(1\,;5)$ appartient à d' équivaut à $3 \times 1 + 2 \times 5 + c = 0$ soit $c = -13$.
• Une équation de d' est donc $3x + 2y - 13 = 0$.

FICHE 51 Systèmes d'équations linéaires

- Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est la donnée de deux équations d'inconnues x et y de la forme ci-contre (avec a, b, c, a', b', c' nombres réels). $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$
Une **solution** de ce système est un **couple** $(x\,;y)$ qui vérifie **simultanément** ces deux équations. **Résoudre** ce système, c'est trouver toutes ses solutions.
- On considère le système (**S**) $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $a' \neq 0$ ou $b' \neq 0$.

Dans un repère orthonormé, $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont les équations de deux droites d et d'.
$\vec{u}\,(-b\,;a)$ et $\vec{v}\,(-b'\,;a')$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d et d'.
Il y a trois cas possibles pour l'ensemble des solutions du système (**S**). Les voici :

$ab'-a'b \neq 0$	$ab'-a'b=0$	
d et d' sont sécantes en A $(x_0\,;y_0)$. **(S) a un seul couple solution** $(x_0\,;y_0)$.	d et d' sont strictement parallèles. **(S) n'a pas de couple solution.**	d et d' sont confondues. **(S) a une infinité de couples solutions.**

Deux calculs

- Calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de périmètre 2,8 m.

Côté : $\frac{2{,}8}{4}$ m $= 0{,}7$ m donc $\mathcal{A} = 0{,}7^2$ m^2 $= 0{,}49$ m^2.

- Factoriser $A = \frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{16}$.

$A = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2$

★

1 (**S**) est le système $\begin{cases} 5x-3y=17 \\ 2x+y=9 \end{cases}$.

a. Expliquer pourquoi (**S**) a un seul couple solution.
b. Exprimer y en fonction de x dans la 2^{e} équation.
c. Substituer y dans la 1re équation puis calculer x.
d. Calculer la valeur de y puis conclure.

a. $ab'-a'b = 5\times 1 - 2(-3) = 11$ et $11 \neq 0$.
b. $y = 9-2x$.
c. $5x - 3(9-2x) = 17$ c'est-à-dire $11x = 44$ soit $x = 4$.
d. D'après **b.**, $y = 9 - 2\times 4$ c'est-à-dire $y = 1$.
Le couple $(4\,;1)$ est l'unique solution du système (**S**).

2 (**S**) est le système $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=5 \end{cases}$.

a. Expliquer pourquoi (**S**) a un seul couple solution.
b. Additionner membre à membre les deux équations et déterminer x.
c. Terminer la résolution du système.

a. $ab'-a'b = 1(-1)-1\times 1 = -2$ et $-2 \neq 0$.
b. On obtient $x+y+x-y = 9+5$ c'est-à-dire $2x = 14$ soit $x = 7$.
c. En remplaçant x par 7 dans la 1re équation, on obtient $7+y=9$ soit $y=2$.
Le couple $(7\,;2)$ est l'unique solution de (**S**).

3 (**S**) est le système $\begin{cases} x+3y=8 \\ 2x+7y=6 \end{cases}$.

a. Expliquer pourquoi (**S**) a un seul couple solution.
b. Multiplier chaque membre de la 1re équation par -2.
c. Additionner membre à membre l'équation obtenue et la 2^{e} équation puis terminer la résolution du système.

a. $ab'-a'b = 1\times 7 - 2\times 3 = 1$ et $1 \neq 0$.
b. On obtient $-2x-6y=-16$.
c. $-2x-6y+2x+7y = -16+6$ soit $y=-10$.
En remplaçant y par -10 dans la première équation de (**S**), on obtient $x+3(-10)=8$ soit $x=38$.
Le couple $(38\,;-10)$ est la solution du système (**S**).

4 (**S**) est le système $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$.

a. Expliquer pourquoi (**S**) n'a pas un seul couple solution.
b. Expliquer pourquoi (**S**) n'a pas de couple solution.

a. $ab'-a'b = 1\times 2 - 2\times 1 = 0$.
b. En divisant par 2 chaque membre de la 2^{e} équation, on obtient $x+y=2$.
Or, les droites d'équations $x+y=1$ et $x+y=2$ sont strictement parallèles donc (**S**) n'a pas de couple solution.

5 (**S**) est le système $\begin{cases} x-2y=4 \\ 0{,}5x-y=2 \end{cases}$.

Expliquer pourquoi (**S**) a une infinité de couples solutions. Préciser lesquels.

$ab'-a'b = 1\times(-1) - 0{,}5\times(-2) = 0$
donc (**S**) n'a pas un seul couple solution.
En multipliant par 2 chaque membre de la 2^{e} équation on obtient $x-2y=4$.
Les deux droites associées à (**S**) sont confondues donc (**S**) a une infinité de couples solutions.
Ce sont les couples $(4+2y\,;y)$ où y décrit $\mathbb{R}$.